4次元Walker計量の幾何学的性質(力学系と微分幾何学)

片山, 登揚

数理解析研究所講究録 1408 巻 2004 年 198-209

4次元 Walker 計量の幾何学的性質

大阪府立工業高等専門学校　片山　登揚 (Noriaki Katayama)
Osaka Prefectural College of Technology

第1節　はじめに

1950 年に Walker は任意次元の *parallel null planes* の場を許容する多様体の計量の標準形を示した [1,2]．ここでは,多様体の次元が 4 で *parallel null planes* の次元が 2 の場合について考察する．4 次元 Walker 計量には,未知関数が 3 個存在するが,Walker 計量が Einstein 計量となるなどの幾何学的性質を満たすように未知関数を決めていく問題を扱う．幾何学的性質を満たすためには非線形の連立偏微分方程式が必要十分条件として得られるが,従来求められていたのは特別な条件のもとでの解であった．本稿では,一般解を見いだしたので報告する．

なお,以下の第 2 節から第 5 節までは,参考文献 [3] で報告された内容をまとめたものであり,第 6 節以降が新たに見出した一般解であることを注意しておく．

第2節　4次元 Walker 計量

Walker は,n 次元の Riemann 多様体が r 次元 *parallel null planes* を許容する計量の標準形が次の式 (2.1) で与えられることを示した [1,2]．

$$[g_{ij}]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & I_{r\times r} \\ 0 & A_{(n-2r)\times(n-2r)} & H \\ I_{r\times r} & H^T & B_{r\times r} \end{bmatrix} \tag{2·1}$$

ただし,$I_{r\times r}$ は大きさ r の単位行列,$A_{(n-2r)\times(n-2r)}$, H はそれぞれ $(n-2r)\times(n-2r)$,$(n-2r)\times r$ の大きさで座標 $(x^1,\dots x^r)$ に依存しない行列である．また,$A_{(n-2r)\times(n-2r)}$ は対称行列でしかも正則行列であり,$B_{r\times r}$ は $r\times r$ の大きさの対称行列である．ここで,$n=4, r=2$ の時を考える．4 次元 Walker 多様体 (M,g,D) とは 4 次元多様体 M ,不定計量 g および 2 次元 *parallel null planes* の場 D の 3 つの組を表す．式 (2.1) から,4 次元 Walker 計量は次の式で与えられる．

$$g = [g_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a & c \\ 0 & 1 & c & b \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

ここで, a,b および c は座標 (x^1,x^2,x^3,x^4) の関数であり,この不定計量 g の指標は $(+,+,-,-)$ であり,2 次元 *parallel null planes* は局所的に $D=span\{\partial/\partial x^1,\partial/\partial x^2\}$ と表される．また,向き付けられた 4 次元 Walker 多様体 (M,g,D) は,互いに可換な概複素構造 J と反概複素構造 J' を許容することが知られて

いる.

第3節　概複素構造Jと反概複素構造J'

4次元 Walker 多様体M上で概複素構造Jと反概複素構造J'を定義する.まず,計量が式 (3.1) となるような局所正規直交基底 $\{e_i\}(i=1,2,3,4)$ を1つ選ぶ.

$$g = [g(e_i, e_j)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

正規直交基底に対してJとJ'の作用を次式 (3.2) と (3.3) で定義する.

$$Je_1 = e_2, \quad Je_2 = -e_1, \quad Je_3 = e_4, \quad Je_4 = -e_3, \tag{3.2}$$

$$J'e_1 = e_2, \quad J'e_2 = -e_1, \quad J'e_3 = -e_4, \quad J'e_4 = e_3, \tag{3.3}$$

このとき,$JJ' = J'J$ が成立して概複素構造Jと反概複素構造J'は互いに可換であることが示される.

このようなJ, J'と計量gから,2つのケーラー形式Ω_gとΩ'_gを2つのベクトル場X, Yを用いて次式 (3.4) のように構成することができる.

$$\Omega_g(X,Y) = g(JX,Y), \quad \Omega'_g(X,Y) = g(J'X,Y) \tag{3.4}$$

1−形式の局所正規直交基底$\{e^i\}(i=1,2,3,4)$を用いると,ケーラー形式Ω_gとΩ'_gは次のようになる.

$$\Omega_g = e^1 \wedge e^2 - e^3 \wedge e^4, \quad \Omega'_g = e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4 \tag{3.5}$$

このとき,$\Omega_g \wedge \Omega_g = -\Omega'_g \wedge \Omega'_g = -2e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 \wedge e^4$ が成立するので,Ω'_gが多様体の向きと適合し,Ω_gが多様体の反対の向きと適合することがわかる.以下,本稿では $c=0$ の場合を制限付き4次元 Walker 計量とよんで調べる.

第4節　制限付き4次元 Walker 計量のJ, J', Ω_gとΩ'_g

制限付き4次元 Walker 計量は,式 (2.2) において$c=0$とおくことより次のようになる.

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

ここで,aとbは座標 (x^1,x^2,x^3,x^4) の関数である.座標基底 $\{\partial/\partial x^i\}(i=1,2,3,4)$ を用いて第3節で定義した局所正規直交基底 $\{e_i\}(i=1,2,3,4)$ を表すと,次式 (4.2) のようになる.

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt[4]{a^2+4}}\left\{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+4}-a)\frac{\partial}{\partial x^1}+\frac{\partial}{\partial x^3}\right\}, \qquad e_2 = \frac{1}{\sqrt[4]{b^2+4}}\left\{\frac{1}{2}(\sqrt{b^2+4}-b)\frac{\partial}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial x^4}\right\}$$
$$e_3 = \frac{1}{\sqrt[4]{a^2+4}}\left\{-\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+4}+a)\frac{\partial}{\partial x^1}+\frac{\partial}{\partial x^3}\right\}, \qquad e_4 = \frac{1}{\sqrt[4]{b^2+4}}\left\{-\frac{1}{2}(\sqrt{b^2+4}+b)\frac{\partial}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial x^4}\right\} \tag{4.2}$$

もちろん,この基底に関して計量は式 (3.1) の標準形となる.

次に,概複素構造Jと反概複素構造J'の作用 (3.2) および (3.3) を座標基底で表すとそれぞれ次のようにまとめられる.まず,概複素構造Jの作用は

$$J\frac{\partial}{\partial x^1} = K\frac{\partial}{\partial x^2}, \qquad J\frac{\partial}{\partial x^2} = -\frac{1}{K}\frac{\partial}{\partial x^1},$$
$$J\frac{\partial}{\partial x^3} = \frac{1}{2}\left(Ka-\frac{b}{K}\right)\frac{\partial}{\partial x^2}+\frac{1}{K}\frac{\partial}{\partial x^4}, \qquad J\frac{\partial}{\partial x^4} = \frac{1}{2}\left(Ka-\frac{b}{K}\right)\frac{\partial}{\partial x^1}-K\frac{\partial}{\partial x^3} \tag{4.3}$$

となる.ただし,Kは

$$K = \sqrt[4]{\frac{b^2+4}{a^2+4}} \tag{4.4}$$

である.他方,反概複素構造J'の作用は

$$J'\frac{\partial}{\partial x^1} = \frac{1}{H}\left(-b\frac{\partial}{\partial x^2}+2\frac{\partial}{\partial x^4}\right), \qquad J'\frac{\partial}{\partial x^2} = \frac{1}{H}\left(a\frac{\partial}{\partial x^2}-2\frac{\partial}{\partial x^4}\right),$$
$$J'\frac{\partial}{\partial x^3} = \frac{1}{2H}\left(H^2-ab\right)\frac{\partial}{\partial x^2}+\frac{a}{H}\frac{\partial}{\partial x^4}, \qquad J'\frac{\partial}{\partial x^4} = -\frac{1}{2H}\left(H^2-ab\right)\frac{\partial}{\partial x^1}-\frac{b}{H}\frac{\partial}{\partial x^3} \tag{4.5}$$

となる.ただし,Hは

$$H = \sqrt[4]{(a^2+4)(b^2+4)} \tag{4.6}$$

である.

さらに,局所正規直交基底 $\{e_i\}(i=1,2,3,4)$ に双対な基底 (1−forms) $\{e^i\}(i=1,2,3,4)$ は座標基底 $\{dx^i\}(i=1,2,3,4)$ で次のように表される.

$$e^1 = \frac{1}{\sqrt[4]{a^2+4}}\left\{dx^1+\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+4}+a)dx^3\right\}, \qquad e^2 = \frac{1}{\sqrt[4]{b^2+4}}\left\{dx^2+\frac{1}{2}(\sqrt{b^2+4}+b)dx^4\right\},$$
$$e^3 = -\frac{1}{\sqrt[4]{a^2+4}}\left\{dx^1-\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+4}-a)dx^3\right\}, \qquad e^4 = -\frac{1}{\sqrt[4]{b^2+4}}\left\{dx^2-\frac{1}{2}(\sqrt{b^2+4}-b)dx^4\right\} \tag{4.7}$$

したがって,2-forms の基底 $\{e^i\wedge e^j\}(i,j=1,2,3,4)$ は,座標基底の 2-forms $\{dx^i\wedge dx^j\}(i,j=1,2,3,4)$ を用いると,次の式 (4.8) のようにまとめられる.

$$
\begin{aligned}
e^1 \wedge e^2 &= \frac{1}{H}dx^1 \wedge dx^2 + \frac{1}{2H}(\sqrt{b^2+4}+b)dx^1 \wedge dx^4 \\
&\quad + \frac{1}{4H}(\sqrt{a^2+4}+a)(\sqrt{b^2+4}+b)dx^3 \wedge dx^4 - \frac{1}{2H}(\sqrt{a^2+4}+a)dx^2 \wedge dx^3 \\
e^1 \wedge e^3 &= dx^1 \wedge dx^3 \\
e^1 \wedge e^4 &= -\frac{1}{H}dx^1 \wedge dx^2 + \frac{1}{2H}(\sqrt{b^2+4}-b)dx^1 \wedge dx^4 \\
&\quad + \frac{1}{4H}(\sqrt{a^2+4}+a)(\sqrt{b^2+4}-b)dx^3 \wedge dx^4 + \frac{1}{2H}(\sqrt{a^2+4}+a)dx^2 \wedge dx^3 \\
e^2 \wedge e^3 &= \frac{1}{H}dx^1 \wedge dx^2 + \frac{1}{2H}(\sqrt{b^2+4}+b)dx^1 \wedge dx^4 \\
&\quad - \frac{1}{4H}(\sqrt{a^2+4}-a)(\sqrt{b^2+4}+b)dx^3 \wedge dx^4 + \frac{1}{2H}(\sqrt{a^2+4}-a)dx^2 \wedge dx^3 \\
e^2 \wedge e^4 &= dx^2 \wedge dx^4 \\
e^3 \wedge e^4 &= \frac{1}{H}dx^1 \wedge dx^2 - \frac{1}{2H}(\sqrt{b^2+4}-b)dx^1 \wedge dx^4 \\
&\quad + \frac{1}{4H}(\sqrt{a^2+4}-a)(\sqrt{b^2+4}-b)dx^3 \wedge dx^4 + \frac{1}{2H}(\sqrt{a^2+4}-a)dx^2 \wedge dx^3
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

式 (4.8) より,式 (3.5) の２つのケーラー形式Ω_gとΩ'_gは座標基底を用いて次のようになる.

$$
\Omega_g = Kdx^1 \wedge dx^4 - \frac{1}{K}dx^2 \wedge dx^3 + \frac{1}{2}\left(aK + \frac{b}{K}\right)dx^3 \wedge dx^4 \tag{4.9}
$$

$$
\Omega'_g = \frac{2}{H}dx^1 \wedge dx^2 + \frac{b}{H}dx^1 \wedge dx^4 - \frac{a}{H}dx^2 \wedge dx^3 + \frac{1}{2}\left(\frac{ab}{H} + H\right)dx^3 \wedge dx^4 \tag{4.10}
$$

第５節　Symplectic 構造とJの可積分性

ここで,制限付き４次元 Walker 多様体が *symplectic* 構造をもつか($d\Omega_g = 0$),また,概複素構造Jが可積分であるかどうかについて調べる.

まず,式 (4.３) よりJの成分$J_i^j\,(i, j = 1,2,3,4)$を次式で定義する.

$$
J\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{j=1}^{4} J_i^j \frac{\partial}{\partial x^j} \qquad (i = 1,2,3,4) \tag{5.1}
$$

つまり,$J_i^j \neq 0$のみを書き下すと式 (5.2) のようになる.

$$
J_1^2 = K, \quad J_2^1 = -\frac{1}{K}, \quad J_3^2 = \frac{1}{2}\left(Ka - \frac{b}{K}\right), \quad J_3^4 = \frac{1}{K}, \quad J_4^1 = \frac{1}{2}\left(Ka - \frac{b}{K}\right), \quad J_4^3 = -K, \tag{5.2}
$$

さらに,Jのねじれテンソル場の成分 $N^i_{jk}\,(i, j, k = 1,2,3,4)$ はJ_i^j を用いて

$$N^i_{jk} = 2\sum_{n=1}^{4}\left(J^n_j\left(\frac{\partial}{\partial x^n}J^i_k\right) + J^i_n\left(\frac{\partial}{\partial x^k}J^n_j\right) - J^n_k\left(\frac{\partial}{\partial x^n}J^i_j\right) - J^i_n\left(\frac{\partial}{\partial x^j}J^n_k\right)\right) \tag{5.3}$$

で定義される.このとき，概複素構造Jが可積分であるとは,

$$N^i_{jk} = 0\,(i,j,k = 1,2,3,4) \tag{5.4}$$

で定義される［4］.

したがって,式 (4.9) および 式(5.4) を陽に書き下すことにより次の定理5.1および定理5.2が成立する.

定理5．1　ケーラー形式Ω_gが *symplectic form*$(d\Omega_g = 0)$ となるための必要十分条件は次の偏微分方程式系 (5.5)から(5.8) を満足することである.

$$\frac{\partial K}{\partial x^1} = 0, \tag{5.5}$$

$$\frac{\partial K}{\partial x^2} = 0, \tag{5.6}$$

$$K^2\frac{\partial a}{\partial x^1} + \frac{\partial b}{\partial x^1} - 2K\frac{\partial K}{\partial x^3} = 0, \tag{5.7}$$

$$K^2\frac{\partial a}{\partial x^2} + \frac{\partial b}{\partial x^2} + \frac{2}{K}\frac{\partial K}{\partial x^4} = 0, \tag{5.8}$$

定理5．2　概複素構造Jが可積分となるための必要十分条件は次の偏微分方程式系 (5.9)から(5.12) を満足することである.

$$\frac{\partial K}{\partial x^1} = 0, \tag{5.9}$$

$$\frac{\partial K}{\partial x^2} = 0, \tag{5.10}$$

$$K^2\frac{\partial a}{\partial x^1} - \frac{\partial b}{\partial x^1} - 2K\frac{\partial K}{\partial x^3} = 0, \tag{5.11}$$

$$K^2\frac{\partial a}{\partial x^2} - \frac{\partial b}{\partial x^2} - \frac{2}{K}\frac{\partial K}{\partial x^4} = 0, \tag{5.12}$$

ここで,注意すべきことは *symplectic form*$(d\Omega_g = 0)$ となる条件 (5.5)から(5.8) は,関数$b(x^1,x^2,x^3,x^4)$と座標x^4の符号を反転させると J が可積分となる条件 (5.9)から(5.12) に一致することである.これまでは,偏微分方程式系 (5.5)から(5.8) に対しては，K = 定数の場合のみの結果が報告されていた〔3〕.
K = 定数の場合は,次の定理のようにまとめられている.

定理５．３　K は定数とする.ケーラー形式 Ω_g が *symplectic form* $(d\Omega_g = 0)$ となるか,または J が可積分となる場合は,次の３つの場合に限られる.

Case Ⅰ　$a = a(x^3, x^4), b = b(x^3, x^4)$ のとき, $d\Omega_g = 0$ でしかも J が可積分となる.さらに,４次元計量は *Einstein* 計量となる.

Case Ⅱ　$a(x^1, x^2 x^3, x^4) = b(x^1, x^2 x^3, x^4)$ のとき, $d\Omega_g \neq 0$ であるが, J は可積分となる.このとき４次元計量は *Einstein* 計量とはならない.また, $K = 1$ である.

Case Ⅲ　$a(x^1, x^2 x^3, x^4) = -b(x^1, x^2 x^3, x^4)$ のとき, $d\Omega_g = 0$ であるが, J は可積分ではない.このとき４次元計量は *Einstein* 計量とはならない.また, $K = 1$ である.

K が定数の条件から 式(5.5)および式(5.6) は自動的に成立し,式 (5.7) および 式(5.8) は次のように簡単な形となる.

$$\frac{\partial}{\partial x^1}\left(K^2 a + b\right) = \frac{\partial}{\partial x^2}\left(K^2 a + b\right) = 0, \tag{5.13}$$

同様に式 (5.11) および 式 (5.12) は, K が定数の条件から次の形に整理される.

$$\frac{\partial}{\partial x^1}\left(K^2 a - b\right) = \frac{\partial}{\partial x^2}\left(K^2 a - b\right) = 0, \tag{5.14}$$

以上,式 (5.13) と式 (5.14) から定理５．３は容易に示される.

第６節　Symplectic 構造を許容する計量

前節では,ケーラー形式 Ω_g が *symplectic form* $(d\Omega_g = 0)$ となる条件を, $K =$ 定数の条件のもとで調べた.本節では, $K =$ 定数の条件をはずして, $d\Omega_g = 0$ となる関数 $a(x^1, x^2, x^3, x^4), b(x^1, x^2, x^3, x^4)$ を陽に見出すことを目的とする.つまり,定理５．１の偏微分方程式系 (5.5) から (5.8) の一般解を求める.

まず,記号の簡略化として以下 $K_i = \partial K / \partial x^i, (i = 1,2,3,4)$ のように下付き添え字は座標変数による偏微分を表すとする.一般解の導出は３段階に分けて行う.

<u>第１段階</u>：　式 (5.5) および 式 (5.6) から関数 K は, x^1, x^2 を含まないので,式 (5.7) および 式 (5.8) をそれぞれ x^1, x^2 で積分することにより次式を得る.

$$K^2 a + b = 2KK_3 x^1 + p^A(x^2, x^3, x^4), \tag{6.1}$$

$$K^2 a + b = -\frac{2K_4 x^2}{K} + p^B(x^1, x^3, x^4), \tag{6.2}$$

ここで, $p^A(x^2, x^3, x^4), p^B(x^1, x^3, x^4)$ はそれぞれ変数 x^2, x^3, x^4 と変数 x^1, x^3, x^4 の任意関数を表す.

次に,上式 (6.1) および (6.2) をそれぞれx^2, x^1で偏微分して,さらに式 (5.7), (5.8) を用いると

$$\frac{\partial}{\partial x^2}\left(K^2 a + b\right) = \frac{\partial}{\partial x^2}\left(p^A(x^2, x^3, x^4)\right) = -\frac{2}{K} K_4, \tag{6.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^1}\left(K^2 a + b\right) = \frac{\partial}{\partial x^1}\left(p^B(x^2, x^3, x^4)\right) = 2KK_3, \tag{6.4}$$

となる.従って,関数$p^A(x^2, x^3, x^4), p^B(x^1, x^3, x^4)$は

$$p^A(x^2,x^3,x^4) = -\frac{2}{K}K_4 x^2 + f(x^3,x^4), \qquad p^B(x^1,x^3,x^4) = 2KK_3 x^1 + g(x^3,x^4) \tag{6.5}$$

となる.ここで,$f(x^3, x^4), g(x^3, x^4)$はそれぞれ変数 x^3, x^4 の任意関数を表す.式 (6.5) を式 (6.1), (6.2) へ代入すると

$$K^2 a + b = 2KK_3 x^1 - \frac{2}{K}K_4 x^2 + f(x^3, x^4), \tag{6.6}$$

$$K^2 a + b = -\frac{2}{K}K_4 x^2 + 2KK_3 x^1 + g(x^3, x^4), \tag{6.7}$$

となるので,$f(x^3,x^4) = g(x^3,x^4)$ が導かれる.$2f(x^3,x^4)$を改めて$f(x^3,x^4)$とおくと,式 (5.7) と (5.8) は

$$K^2 a + b = 2KK_3 x^1 - \frac{2}{K}K_4 x^2 + 2f(x^3, x^4), \tag{6.8}$$

とまとめられる.

他方,$K = \sqrt[4]{(b^2+4)/(a^2+4)}$であるから,$x^1$ および x^2 でそれぞれ$K^4 = (b^2+4)/(a^2+4)$ を偏微分すると

$$\frac{1}{(a^2+4)^2}(2bb_1(a^2+4) - (b^2+4)2aa_1) = 0, \tag{6.9}$$

$$\frac{1}{(a^2+4)^2}(2bb_2(a^2+4) - (b^2+4)2aa_2) = 0, \tag{6.10}$$

となる.つまり,

$$K^4 = \frac{b^2+4}{a^2+4} = \frac{bb_1}{aa_1} = \frac{bb_2}{aa_2}, \tag{6.11}$$

が成り立つ.

第２段階：さて,$K=C$ （定数）とする.式(5-7),(5-8)より次の式を得る.

$$(C^2a+b)_i=(C^2a\pm\sqrt{C^4(a^2+4)-4})_i=0 \quad (i=1,2) \tag{6.12}$$

さらに,$C^2a+b=0$ とすると式(6.11)から $K^4=\dfrac{C^4a^2+4}{a^2+4}=C^4$ となるので, $K=C=1$ が成立して, $a(x^1,x^2,x^3,x^4)=-b(x^1,x^2,x^3,x^4)$ を得る.この結果は,定理５．３の Case Ⅲに該当する.

他方,$C^2a+b\neq 0$ とすると,式(6.12)から $C^2a_1+b_1=C^2a_2+b_2=0$ であるので変数 x^3,x^4 の任意関数 $h(x^3,x^4)$ を用いて $C^2a+b=h(x^3,x^4)$ とかける.したがって,関数 b は

$$b=h(x^3,x^4)-C^2a \tag{6.13}$$

となるが,$b^2+4-C^4(a^2+4)=0$ に代入すると

$$b^2+4-C^4(a^2+4)=h(x^3,x^4)^2-2aC^2h(x^3,x^4)+a^2C^4-a^2C^4-4C^4=0 \tag{6.14}$$

を得る.したがって,関数 a は変数 x^3,x^4 のみの関数であることがわかる.つまり, $a=a(x^3,x^4),b=b(x^3,x^4)$ と表される.この結果は,定理５．３の Case Ⅰに該当する.

第３段階：最後に K が x^3,x^4 に依存する場合を考える.

式 (6.11) から $K^2aa_1=bb_1/K^2$ となるが両辺に ba_1 を加えると次の式が成立する.

$$(K^2a+b)a_1=\frac{b}{K^2}(K^2a+b)_1. \tag{6.15}$$

また,式 (5-7) から $(K^2a+b)_1=2KK_3$ であるので,上式 (6.15) は

$$(K^2a+b)a_1=2K_3\frac{b}{K}=2K_3\frac{-K^2a+(K^2a+b)}{K}. \tag{6.16}$$

となる.さらに,式 (6.8) より式 (6.16) は次のように変形される.

$$\left(KK_3x^1-\frac{1}{K}K_4x^2+f(x^3,x^4)\right)a_1+KK_3a=\frac{2K_3}{K}\left(KK_3x^1-\frac{1}{K}K_4x^2+f\right) \tag{6.17}$$

式 (6.17) は座標変数 x^2,x^3,x^4 はパラメータとみて,変数 x^1 に関する微分方程式とみなすことができる.

まったく同様な計算で変数 x^2 に対する微分方程式として次の式 (6.18) を得る.

$$\left(KK_3x^1-\frac{1}{K}K_4x^2+f\right)a_2-\frac{1}{K}K_4a=-\frac{2K_4}{K^3}\left(KK_3x^1-\frac{1}{K}K_4x^2+f\right) \tag{6.18}$$

さて,ここで次の結果を引用する. 独立変数 t で従属変数 y に関する常微分方程式

$$(\alpha t + \beta)\frac{dy(t)}{dt} + \alpha y(t) = \gamma t + \delta \tag{6.19}$$

を考える.ただし,$\alpha,\beta,\gamma,\delta$ は定数である.このとき,方程式 (6.19) の一般解は定数C_0を用いて

$$y(t) = \left(\frac{1}{2}\gamma t^2 + \delta t + \alpha C_0\right)\frac{1}{\alpha t + \beta} \tag{6.20}$$

で与えられる.この結果を用いることにより,式 (6.17) から

$$a = \frac{K_3^2(x^1)^2 - \dfrac{2K_3K_4}{K^2}x^1x^2 + \dfrac{1}{K}K_3fx^1 + KK_3h^A(x^2,x^3,x^4)}{KK_3x^1 - \dfrac{1}{K}K_4x^2 + f} \tag{6.21}$$

を得る.まったく同様に,式 (6.18) から

$$a = \frac{\dfrac{1}{K^4}K_4^2(x^2)^2 - \dfrac{2K_3K_4}{K^2}x^1x^2 - \dfrac{1}{K^3}K_4fx^2 - \dfrac{K_4}{K_3}h^B(x^1,x^3,x^4)}{KK_3x^1 - \dfrac{1}{K}K_4x^2 + f} \tag{6.22}$$

が得られる.ここで,関数 h^A,h^B はそれぞれ変数 x^2,x^3,x^4 および x^1,x^3,x^4 の任意関数である.

式 (6.21) と (6.22) を比較することにより関数$a(x^1,x^2,x^3,x^4)$は求められ,また関数 $b(x^1,x^2,x^3,x^4)$ についても,式 (6.8) より得られる.得られた結果は次のように表される.

$$\begin{aligned} a(x^1,x^2,x^3,x^4) &= \psi^{-2}\left(\psi L + \phi - \frac{\psi^4 - 1}{\psi L + \phi}\right), \\ b(x^1,x^2,x^3,x^4) &= \psi L + \phi + \frac{\psi^4 - 1}{\psi L + \phi} \end{aligned} \tag{6.23}$$

ここで, $L = L(x^1,x^2,x^3,x^4) = (\partial\psi/\partial x^3)x^1 - \psi^{-2}(\partial\psi/\partial x^4)x^2$ であり,関数 $\phi=\phi(x^3,x^4)$ および $\psi=\psi(x^3,x^4)$ はともにx^3,x^4 の任意関数であり,また $K=\psi$ が成立する.

以上の結果から,次の定理を得る.

定理6．1 ケーラー形式Ω_gが *symplectic form*$(d\Omega_g = 0)$ となるための必要十分条件は,関数$a(x^1,x^2,x^3,x^4), b(x^1,x^2,x^3,x^4)$は次の３ついずれかの場合である.

<u>タイプ</u> Ω_A : $a = a(x^3,x^4), b = b(x^3,x^4)$で,ただし,$K = C$ (定数) である.

<u>タイプ</u> Ω_B : $a(x^1,x^2,x^3,x^4) = -b(x^1,x^2,x^3,x^4)$である.このとき,$K = 1$となる.

<u>タイプ</u> Ω_C : $a(x^1,x^2,x^3,x^4), b(x^1,x^2,x^3,x^4)$ は 式 (6.23) で与えられる.

定理5. 2のところで注意したように, J が可積分となる条件は $d\Omega_g=0$ の条件とは関数 b および座標変数 x^4 の符号反転であった. したがって, 次の定理が成立が成立する.

定理6. 2 概複素構造 J が可積分となるための必要十分条件は, 関数 $a(x^1,x^2,x^3,x^4), b(x^1,x^2,x^3,x^4)$ は次の3ついずれかの場合である.

<u>タイプ</u> J_A : $a=a(x^3,x^4), b=b(x^3,x^4)$ で, ただし, $K=C$ (定数) である.

<u>タイプ</u> J_B : $a(x^1,x^2,x^3,x^4)=b(x^1,x^2,x^3,x^4)$ である. このとき, $K=1$ となる.

<u>タイプ</u> J_C : $a(x^1,x^2,x^3,x^4), b(x^1,x^2,x^3,x^4)$ は 式 (6.24) で与えられる.

$$
\begin{aligned}
a(x^1,x^2,x^3,x^4) &= \psi^{-2}\left(\psi M+\mu-\frac{\psi^4-1}{\psi M+\mu}\right),\\
b(x^1,x^2,x^3,x^4) &= -\psi M-\mu-\frac{\psi^4-1}{\psi M+\mu}
\end{aligned}
\tag{6.24}
$$

ここで, $M=M(x^1,x^2,x^3,x^4)=(\partial\psi/\partial x^3)x^1+\psi^{-2}(\partial\psi/\partial x^4)x^2$ であり, 関数 $\phi=\phi(x^3,x^4)$ および $\psi=\psi(x^3,x^4)$ はともに x^3,x^4 の任意関数であり, また $K=\psi$ が成立する.

第7節 Einstein 計量との関係

前節で得られた3タイプ $\Omega_A,\Omega_B,\Omega_C$ の計量は *symplectic* 性から, また, J_A,J_B,J_C の3タイプは J 可積分性から導かれたものであり, 計量としての何らかの優秀性を有しているとみなすことができる.

他方, *Einstein* 計量であることは計量としてのひとつの優秀性とみなすことができる. 制限付き4次元 Walker 計量 (4.1) が, *Einstein* 計量となる場合として, 次の2つの場合 E_A, E_B が知られている.

<u>タイプ</u> E_A :

$$
\begin{aligned}
a &= k(x^1)^2+x^1R(x^3,x^4)+\xi(x^3,x^4),\\
b &= k(x^2)^2+x^2P(x^3,x^4)+\eta(x^3,x^4),
\end{aligned}
\tag{7.1}
$$

ここで, k は $k\neq 0$ の定数であり, 関数 $R(x^3,x^4), P(x^3,x^4)$ は $R_4+P_3=0$ を満たすものとし, 関数 $\xi(x^3,x^4), \eta(x^3,x^4)$ は変数 x^3,x^4 の任意関数とする.

タイプ　E_B :

$$a = x^1 R(x^3, x^4) + x^2 S(x^3, x^4) + \xi(x^3, x^4),$$
$$b = x^2 P(x^3, x^4) + x^1 Q(x^3, x^4) + \eta(x^3, x^4). \tag{7.2}$$

ここで,関数 $\xi(x^3,x^4),\eta(x^3,x^4)$ は変数 x^3,x^4 の任意関数であり,4つ関数 $R(x^3,x^4),P(x^3,x^4),$ $Q(x^3,x^4),S(x^3,x^4)$ には $SP=2S_4, QR=2Q_3, R_4+P_3=SQ$ の3つの拘束条件式がある.

次に,導かれた *symplectic* 性 ($d\Omega_g=0$), J 可積分性, *Einstein* 計量であることの関係を調べるとつぎのようにまとめられる.

CASE Ⅰ $d\Omega_g=0$ かつ J 可積分とする.

Ω_A かつ J_A のときのみで,タイプ E_B に含まれる.具体的には

$$a = a(x^3, x^4), b = b(x^3, x^4) \tag{7.3}$$

である.

CASE Ⅱ $d\Omega_g=0$ かつ *Einstein* 計量であるとする.

Ω_B かつ E_B のときのみで, J 可積分とはならない.具体的には次の3通りである.

$$a = -b = \frac{-2x^1}{x^3 + C} + \xi(x^3, x^4) \tag{7.4}$$

または

$$a = -b = \frac{2x^2}{x^4 + C} + \xi(x^3, x^4) \tag{7.5}$$

または

$$a = -b = \frac{-2x^1}{x^3 + C_1 x^4 + C_2} + \frac{-2x^2 C_1}{x^3 + C_1 x^4 + C_2} + \xi(x^3, x^4) \tag{7.6}$$

である.

CASE Ⅲ J 可積分かつ *Einstein* 計量であるとする.

J_B かつ E_B のときのみで, $d\Omega_g \neq 0$ である.具体的には次の3通りである.

$$a = b = \frac{-2x^1}{x^3 + C} + \xi(x^3, x^4) \tag{7.7}$$

または

$$a = b = \frac{-2x^2}{x^4 + C} + \xi(x^3, x^4) \tag{7.8}$$

または

$$a = b = \frac{-2x^1}{x^3 + C_1 x^4 + C_2} + \frac{-2x^2 C_1}{x^3 + C_1 x^4 + C_2} + \xi(x^3, x^4) \tag{7.9}$$

である.

第8節　まとめ

ケーラー形式Ω_gが *symplectic form*($d\Omega_g = 0$) となる条件と概複素構造Jが可積分となるため条件を一般的に調べた.さらに,*Einstein* 計量との関係も調べた.今後は,もうひとつのケーラー形式Ω'_gが *symplectic form*($d\Omega'_g = 0$) となる条件および反概複素構造J'が可積分となるための条件を一般の場合（$K \neq$ 定数）に調べる.さらに,制限付き４次元 walker 計量の条件 である $c = 0$ の条件を除いた一般の場合の４次元 Walker 計量 (2.2) に対しての同様な問題を検討していく必要がある.

なお,本研究は松下氏（滋賀県立大学）と土師氏との共同研究である.

参考文献

〔1〕 A.G.Walker,Canonical form for a Riemannian space with a parallel field of null planes, Quart. J. Math. Oxford 1(2) (1950) 69-79.
〔2〕 A.G.Walker,Canonical forms (II):parallel partially null planes, Quart. J. Math. Oxford 1(2) (1950) 147-152.
〔3〕 Y.Matsushita, Four-dimensional Walker metrics and symplectic structures, J. Geom. Phys.52 (2004) 89-99.
〔4〕 Kobayashi and Nomizu ,Foundations of differential geometry vol. II, Wiley, New York, (1969).